Pravděpodobnostní analýzy metodou Latin Hypercube Sampling

T. Svoboda & M. Hilar.
3G Consulting Engineers, Prague, Czech Republic

ABSTRAKT: Metoda Latin Hypercube Sampling je numerická simulační metoda typu Monte Carlo, která je vhodná pro realizaci pravděpodobnostních analýz. Předkládaný příspěvek je zaměřen na stručnou charakteristiku algoritmu metody LHS. Věnuje se nejpoužívanějším modifikacím této metody a zavedení korelace mezi vstupními náhodnými proměnnými, které je založeno na optimalizaci pořadí jednotlivých vzorků ve sloupcích matice náhodných proměnných. LHS konverguje výrazně rychleji ke správnému řešení než metoda Monte Carlo a významně tak snižuje počet simulací a tedy i časovou náročnost výpočtů při zachování vysoké přesnosti odhadů statistických charakteristik. Příspěvek dále shrnuje aplikace metody pro řešení geotechnických úloh v České republice a stručně charakterizuje připravený software zaměřený na realizace pravděpodobnostních analýz metodu LHS. Ten je konkrétně založen na metodě LHS *mean* ve spojení s algoritmem simulovaného žíhání z důvodu zohlednění korelovanosti vstupních proměnných.

1 ÚVOD

Mechanické parametry horninového a zeminového masivu stanovené na základě výsledků geotechnického průzkumu mají často značný rozptyl hodnot. Tato skutečnost vyplývá nejen z přirozeného vývoje geologického prostředí, ale je zapříčiněna i chybou vznikající při jejich měření in-situ nebo v laboratorních podmínkách. Nejistota spojená se stanovením parametrů vede současně k nejistotě určení výsledku řešeného problému. Z tohoto důvodu je vhodné materiálovým parametrům přisoudit charakter náhodných veličin a geotechnický problém řešit pomocí pravděpodobnostních metod.

Pravděpodobnostní analýzy se stávají stále dostupnějším nástrojem pro numerické řešení geotechnických úloh. Překážkou rozšíření v běžné praxi jsou zejména vyšší časové nároky na zpracování výpočtů, nároky na výstupy z geotechnického průzkumu, a dále také chybějící implementace pravděpodobnostních metod v běžně používaném programovém vybavení. Příspěvek se proto zabývá redukční pravděpodobnostní metodou Latinských hyperkrychlí (Latin Hypercube Sampling), která je alternativou k časově náročné simulační metodě Monte Carlo.

2 PRAVDĚPODOBNOSTNÍ CHARAKTER PARAMETRŮ

Bez ohledu na zvolený způsob řešení geotechnického problému (analytické, numerické řešení), výsledky analýz jsou citlivé na hodnoty vstupních parametrů. V případě variability těchto hodnot, je vhodné považovat tyto parametry za náhodné veličiny, které jsou popsány statistickými či pravděpodobnostními charakteristikami. Náhodné vstupní veličiny jsou v pravděpodobnostních výpočtech reprezentovány sadou deterministických čísel (tzv. realizací či vzorků), která jako celek tvoří jednu z deterministických úloh, ze kterých se skládá řešený náhodný problém, například geomechanický model. Odezvou modelu je sada hodnot, u níž hledáme statistické a pravděpodobnostní charakteristiky.

Z praktického hlediska příspěvek dále uvažuje pouze spojité náhodné veličiny, které mohou nabývat všech hodnot z daného konečného nebo nekonečného intervalu a uvádí pouze nejpoužívanější druhy charakteristik.

Spojitá náhodná veličina X je definována funkcí hustoty pravděpodobnosti $f(x)$ a kumulativní distribuční funkcí $F(x)$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

Polohu hodnot náhodné veličiny X nejlépe vystihuje střední neboli očekávaná hodnota $E(X)$ (též μ) (2), variabilitu (varianci, rozptýlenost) dat vyjadřuje rozptyl $Var(X)$, (σ_X^2):

$$\mu(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (2)$$

$$\sigma^2(X) \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx \qquad (3)$$

Odmocnina z rozptylu je nazývána směrodatnou odchylkou ($\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2}$). Dalšími často používanými charakteristikami (třetím a čtvrtým momentem) náhodné veličiny vhodnými pro určení asymetrie pravděpodobnosti rozdělení jsou šikmost a špičatost.

Důležitou vlastností náhodných proměnných X a Y je stupeň jejich vzájemné závislosti. Ta je charakterizována kovariancí $cov(X, Y)$, respektive koeficientem korelace $corr(X, Y)$(5), který se, na rozdíl od kovariance, nemění při lineární transformaci proměnných. Korelační koeficient nabývá hodnot od -1 do 1.

$$cov(X, Y) = E\left[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\right] \qquad (4)$$

$$corr(X, Y) = \frac{cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \qquad (5)$$

Pro statistické zpracování variabilních vstupních parametrů je nejprve nutné tyto parametry popsat pravděpodobnostním rozdělením. Existuje řada vhodných testů na shodu experimentálních dat s vybraným pravděpodobnostním rozdělením, například χ^2 test, Kolmogorov - Smirnovův test, MLE, případně další pokročilé statistické analýzy implementované do uživatelských programů. Pokud je k dispozici málo vstupních dat, či známe pouze interval hodnot, ve kterých se parametry pohybují, je obtížné spolehlivě stanovit odpovídající rozdělení.

Převážná většina studií a prací zabývající se pravděpodobnostní analýzou geotechnických problémů (např. Hamm a kol. 2006, Flores 2010, Suchomel 2011, Choi 1997) poukazuje na skutečnost, že parametry horninového, případně zeminového masivu je vhodné popsat normálním, či log-normálním rozdělením.

Při řešení pravděpodobnostních analýz můžeme vstupní parametry (náhodné veličiny) označit též za náhodné proměnné.

3 METODA LATIN HYPERCUBE SAMPLING

Metoda Monte Carlo je běžně používaná numerická simulační metoda pro řešení náhodných problémů, u kterých požadujeme statistické a pravděpodobnostní informace odezvy problému. K jejich přesnému odhadu však Monte Carlo vyžaduje obvykle velmi mnoho pokusů (simulací), aby bylo dosaženo požadované chyby. Z důvodu snížení počtu simulací a časové náročnosti byla vyvinuta řada redukčních metod, mezi něž náleží i metoda Latin Hypercube Sampling.

První zavedení metody Latinských hyperkrychlí souvisí s řešením a zpracováním nejistot v analýzách bezpečnosti nukleárních elektráren ve Spojených státech amerických. Metoda byla prvně publikována Conoverem a jeho kolegy v roce 1979 a její praktické použití v práci Imana & Conovera (1982). LHS je velmi účinným nástrojem pro provádění statistických analýz, které jsou zaměřeny na stanovení nižších statistických momentů výsledné odezvy. Metoda LHS konverguje výrazně rychleji ke správnému řešení než metoda Monte Carlo, čímž významně snižuje počet simulací při zachování vysoké přesnosti odhadů parametrů rozdělení (počet simulací je v řádu desítek až prvních stovek). Výhoda metody plyne ze způsobu výběru realizací, kdy celý rozsah vstupní náhodné proměnné je pokryt rovnoměrně vzhledem k distribuční funkci. Žádná reálná hodnota není předem vyloučena. Současně metoda zachovává zjištěné, či odhadnuté funkce hustoty pravděpodobnosti pro jednotlivé náhodné veličiny a stanovené korelační koeficienty mezi nimi. Aby bylo dosaženo těchto výhod, LHS sestavuje vysoce závislou sdruženou hustotu pravděpodobnosti vektoru náhodných veličin.

3.1 *Výběr a forma vzorků*

Principem metody je N násobné generování vzorků každé náhodné proměnné. Definiční obor kumulativní distribuční funkce $F(X)$ dané proměnné je rozdělen na N disjunktivních intervalů (vrstev). Jednotlivé intervaly nabývají shodné pravděpodobnosti 1/N. Z každé vrstvy je vybrána jedna hodnota, která reprezentuje celý interval a v simulaci se použije právě jednou, jedná se tedy o stratifikační metodu. V převážné většině případů se následně pomocí inverzní transformace distribuční funkce získá reprezentativní hodnota náhodné proměnné.

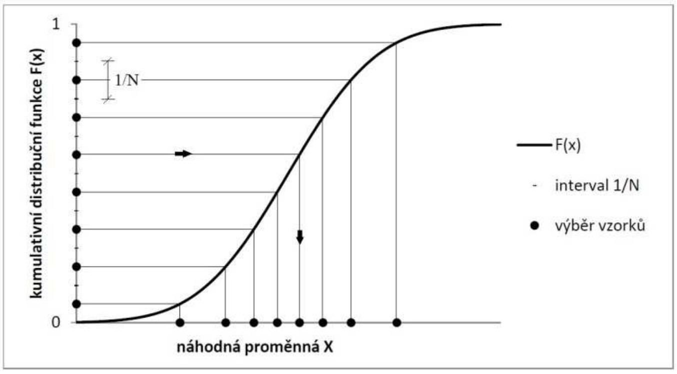
Existuje více způsobů výběru vzorků z jednotlivých intervalů definovaných na oboru distribuční funkce. Jednou z metod je vygenerování N náhodných čísel n z intervalu $\langle 0,1 \rangle$ o rovnoměrném rozdělení. Tyto čísla jsou lineární transformací přiřazeny k odpovídajícím intervalům a využitím inverzní distribuční funkce stanoveny hodnoty vzorků $x_{i,k}$ proměnné X_i:

$$x_{i,k} = F_i^{-1}\left(\frac{n+(k-1)}{N}\right) \qquad (4)$$

kde k je k-tý vzorek (též vrstva, interval) i-té náhodné proměnné X_i, F_i^{-1} je inverzní distribuční funkce této proměnné a N je počet intervalů a současně počet simulací. Způsob výběru a samotná metoda je často označována jako „LHS random“.
Dalším způsobem generování vzorků náhodné proměnné, který je aplikován v převážné většině studií, je výběr hodnoty ze středu intervalu 1/N na distribuční funkci, který je spojený opět s přímým použitím inverzní distribuční funkce (5):

$$x_{i,k} = F_i^{-1}\left(\frac{k-0{,}5}{N}\right) \tag{5}$$

Tato metoda je někdy označována jako „LHS *median*“. Obr. 1 znázorňuje kumulativní distribuční funkci *F(x)*, která je rozdělena na osm intervalů o stejné pravděpodobnosti 1/N. Body na vertikální ose představují středy těchto intervalů a následně vyznačují odpovídající hodnoty $x_{i,k}$ proměnné X_i.



Obrázek 1. Způsob výběru vzorků metodou LHS median

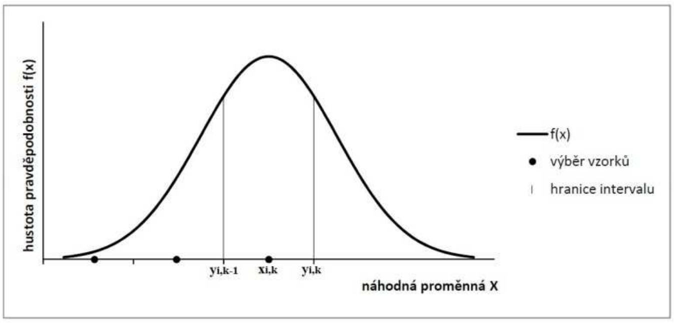
Autoři Huntington & Lyrintzis (1998), Keramat & Kielbasa (1999), Vořechovský (2009) poukazují na nevýhody této stratifikační metody. Ty se týkají především krajních intervalů oboru distribuční funkce, které nejvíce ovlivňují hodnotu rozptylu, šikmosti a špičatosti rozdělení vstupních proměnných. Metoda poskytne odpovídající, či velmi blízkou střední hodnotu hodnotě požadované, nicméně rozptyl se většinou výrazně liší.
Huntington a Lyrintzis navrhují řešit výběr reprezentativních vzorků $x_{i,k}$ jako střední hodnotu intervalu vymezeného na funkci hustoty pravděpodobnosti dané proměnné X_i.

$$x_{i,k} = N\int_{y_{i,k-1}}^{y_{i,k}} x f(x)dx \tag{6}$$

Meze integrálu $y_{i,k}$ lze určit ze vztahu:

$$y_{i,k} = F_i^{-1}\left(\frac{k}{N}\right) \tag{7}$$

Metoda, značená „LHS mean“ (obr. 2), lépe vystihuje funkci hustoty pravděpodobnosti, kdy střední hodnota je stanovena přesně a odhad rozptylu dané proměnné je značně bližší požadovanému. „LHS mean“ konverguje ke správnému řešení rychleji než metoda „LHS median“ a tudíž vyžaduje menší počet simulací.



Obrázek 2. Způsob výběru reprezentativních vzorků metodou LHS *mean*.

Zhodnocení a doporučení ve prospěch stratifikačních metod obecně vůči náhodnému způsobu výběru vzorků (metoda Monte Carlo) je součástí studie Flores et al. (2010), Helton & Davis (2003), Olsson et al. (2003) a další.
Při aplikaci metody LHS se většinou uvažuje jedna ze dvou forem vzorků, které jsou uspořádány do sad pro jednotlivé deterministické výpočty. V první, po vygenerování reprezentativních vzorků pro všechny uvažované náhodné proměnné, jsou vzorky do jednotlivých simulací vybírány ve formě náhodných permutací celých čísel 1, 2, … až N (viz Tab. 1).

Tabulka 1. Permutační tabulka – počet simulací 1 až N vzhledem k počtu veličin X_1 až X_i

N/X_i	X_1	X_2	X_3	X_4	…	X_i
1	3	1	6	3	2	6
2	5	2	2	1	4	4
3	1	6	3	5	5	1
4	4	3	5	2	1	3
:	6	4	4	6	3	5
N	2	5	1	4	6	2

Řádky permutační tabulky definují počet simulací N a jejich pořadí, sloupce počet proměnných X_i uvažovaných při řešení náhodného problému. Jednotlivé prvky, čísla permutační tabulky určují *k*-tou vrstvu (interval), ze které je vybrán vzorek $x_{i,k}$ proměnné X_i. Jakmile jsou pořadová čísla nahrazena vzorky, můžeme hovořit o matici vzorků **X** *K* x *N*, kde *K* označuje počet veličin a *N* počet simulací.
Druhá forma uvažuje normalizované vzorky $u_{i,j}$ náhodně uspořádané v jednotlivých sloupcích matice upravených vzorků **U** *K* x *N*.

$$u_{ij} = \frac{x_{i,j} - u_j}{\sigma_j} \tag{8}$$

kde u_j a σ_j jsou střední hodnota a směrodatná odchylka j-té proměnné. Tato transformace zajistí, že všechny sloupce (proměnné) mají nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl. Dalšími možnostmi je pracovat přímo s hodnotami vzorků jednotlivých proměnných nebo s náhodnými hodnotami z rovnoměrného rozdělení (0,1) vygenerovaných ve sloupcích matice K x N.

Mezi jednotlivými proměnnými dochází zpravidla ke vzniku značných nežádoucích korelací, které ovlivňují přesnost a kvalitu výsledků. Výše popsaná náhodná permutace představuje nejjednodušší permutační metodu. Je přijat předpoklad, že vygenerované vektory matice **X** (případně **U)** jsou nezávislé, případně vzniklé závislosti dostatečně malé.

3.2 *Zohlednění statistické závislosti*

Míru statistické závislosti jednotlivých sloupců permutační tabulky je vhodné ověřit využitím Pearsonova lineárního korelačního koeficientu nebo Spearmanova koeficientu pořadové korelace. Většina prací řeší implementaci statistické korelace formou záměny pořadí vzorků u jednotlivých proměnných a nemění již jejich hodnoty. Tímto způsobem je zachováno pravděpodobnostní rozdělení každé náhodné proměnné.

Existuje řada metod navržených pro zohlednění korelovanosti náhodných veličin, které disponují libovolným pravděpodobnostním rozdělením a hodnotami korelačních koeficientů. Příspěvek se dále zaměřuje na stručný popis a hodnocení několika vybraných metod, které jsou společně založeny na optimalizaci pořadí vzorků ve sloupcích matice K x N, které byly generovány bez přihlédnutí ke korelacím.

Ortogonální transformace nezávislých náhodných proměnných v korelované představuje nejrozšířenější způsob zavádění korelace v metodě LHS. Iman a Conover (1982) popsali metodu využívající Spearmanův koeficient korelace (9) k popisu statistické závislosti mezi sloupci matice pořadových čísel a Choleského dekompozici korelační matice (10) (viz dále). Nevýhodou této metody však zůstává přijetí předpokladu nekorelovaných vstupních proměnných a přetrvávající významná chyba v korelaci mezi proměnnými vzhledem k požadované korelační matici.

Metoda „*Updated Latin Hypercube Sampling*“ (ULHS) (Florian 1992) vychází z postupu Imana a Conovera a byla vyvinuta z důvodu redukce nežádoucí korelace s cílem obdržet nekorelované proměnné. Spearmanův koeficient korelace popisuje závislost mezi sloupci náhodně generovaných pořadových čísel matice pořadí **R** (K x N).

$$c_{i,j} = 1 - \frac{6\sum_k (R_{ki} - R_{kj})^2}{N(N-1)(N+1)} \tag{9}$$

Koeficienty $c_{i,j}$ jsou Spearmanovy koeficienty pořadové korelace mezi proměnnými i a j v intervalu $\langle -1,1 \rangle$ a R jednotlivé prvky matice **R**. Korelační matice **C** je symetrická, pozitivně definitivní a v případě UHLS má tvar jednotkové matice. Choleského dekompozice (10) vyžaduje, aby matice **C** byla pozitivně definitivní.

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{L} \tag{10}$$

L je dolní trojúhelníková matice. Upravená matice pořadí $\mathbf{R}^*$ vychází ze vztahu:

$$\boldsymbol{R}^* = \boldsymbol{R}\boldsymbol{L}^{-1} \tag{11}$$

Pořadová čísla v každém sloupci matice pořadí **R** jsou následně srovnána tak, aby měla stejná pořadí jako čísla v odpovídajících sloupcích matice $\mathbf{R}^*$. Tento způsob úpravy matice pořadí může být realizován iterativně a teoreticky dovolí výrazné snížení nežádoucí korelace. Další autoři (např. Huntington & Lyrintzis 1998) však upozorňují na přetrvávající nedostatky metody v podobě konvergence k pořadím, které i nadále poskytují chybnou korelaci mezi veličinami. V případě požadavku simulace korelovaných proměnných má popsaná technika vážné problémy.

Huntington a Lyrintzis (1998) navrhují optimalizační metodu nazvanou „*single-switch*“. Ta nevyužívá pořadová čísla, ale přímo uspořádává upravené vzorky a pro stanovení korelací využívá Pearsonův korelační koeficient. Následující procedura je řešena postupně pro každý sloupec m matice **R** se vzorky R. Vektor **T** obsahuje aktuální korelační koeficienty mezi m-tým a každým předchozím sloupcem (m-1):

$$T_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} R_{ij} R_{im} \tag{12}$$

kde $1 \le j \le m$-1. Chyba korelačních koeficientů E je:

$$E = \sum_{j=1}^{m-1} (T_j - T'_{jm})^2 \tag{13}$$

kde T' je matice obsahující požadované korelační koeficienty. Principem optimalizační metody je výpočet změny E pro každý pár vzorků m-té veličiny, která nastane při jejich vzájemném prohození. Pár poskytující největší redukci E je prohozen. Tento postup je pro m-tou proměnnou realizován iterativně až do okamžiku, kdy není možné žádné další zlepšení, nebo se korelační koeficienty nacházejí uvnitř definovaných intervalů. Postupně je procedura opakována pro všechny proměnné. Metoda „single-switch“ ve srovnání s UHLS poskytuje výrazně vyšší korelační přesnost při nižším počtu proměnných.

Velmi efektivní a přesnou proceduru pro zavedení požadovaných korelací představuje metoda simulovaného žíhání (např. Morris & Mitchel 1995, Minasny & McBratney 2006, Vořechovský 2009). Pro hodnocení kvality statistických závislostí upřednostňuje normu E, která zohledňuje deviace všech koeficientů korelace s druhou mocninou (14), před maximálním rozdílem, který není vhodný pro přímou minimalizaci.

$$E = \sum_{i=1}^{N_V} \sum_{j=1}^{N_V} (A_{i,j} - T_{i,j})^2 \tag{14}$$

Kde N_V je počet proměnných a v závorce rozdíl korelačních koeficientů aktuálních $A_{i,j}$ a požadovaných $T_{i,j}$ pro veličiny i a j. Metoda vychází z jednoduché pravděpodobnostní metody, která zaměňuje pořadí náhodně zvolené dvojice vzorků ve sloupci náhodně vybrané proměnné v matici **X** (např. normalizované vzorky, pořadová čísla vzorků). V případě, že došlo ke snížení normy E, byla matice **X** přijata jako nová generace, tedy výchozí matice. Uvedený postup ve většině případů končí ve stavu, kdy jakákoliv změna nepřináší snížení normy a nová matice nemůže být přijata. Metoda tak nachází tzv. lokální minima bez šance nalezení skutečného globálního minima (Vořechovský 2009). Princip metody simulovaného žíhání je tedy založen na porušení podmínky, že nová generace vzorků může být přijata pouze v případě, že došlo ke snížení normy E. V každé iteraci dochází k vytvoření nové generace, která je buď přijata, nebo ne. Simulované žíhání přichází na řadu v druhém případě a nový vektor s vyšší energetickou konfigurací ($\Delta E > 0$) je přijat s určitou pravděpodobností, která se řídí Boltzmannovo rozdělením:

$$P \approx exp\left(\frac{-\Delta E}{t}\right) \tag{15}$$

Toto rozdělení uvažuje systém, který se nachází v teplotní rovnováze t a má svou energii pravděpodobnostně rozloženou mezi možné energetické stavy ΔE. Nenulová pravděpodobnost přijetí nové generace vzorků zvyšuje možnost nalezení konfigurace, která se vyhne lokálnímu minimu.

Další permutační metodou, zmíněnou již méně podrobně, je metoda „Symmetric Latin Hypercubes Design (SLHD)“ (Ye a kol. 2000), která vychází ze symetrické matice N x K. SLHD je založen na algoritmu „columnwise-pairwise (CP)“. Ten při hledání optimální symetrické matice v každém kroku dané iterace prohazuje současně pořadí dvou párů vzorků uvnitř sloupce. Na konci iterace je vybrána nejlepší záměna vzhledem ke kritériu minimalizace a použita k úpravě matice. Podoba výsledné matice je výrazně citlivá na počáteční náhodné vygenerování permutační matice, tudíž by celý algoritmus měl být opakován vícekrát s různými počátečními permutacemi. Metodu autoři vyhodnocují na základě porovnání s algoritmem simulovaného žíhání a Choleského dekompozicí. Metoda CP je vhodná především pro návrhy malého rozsahu (např. 2 proměnné x 12 simulací), zatímco simulované žíhání pro rozsáhlejší koncepty (např. již od 4 proměnných a 25 simulací). Autoři poukazují na skutečnost, že simulované žíhání ve spojení se symetrickou maticí poskytlo ve většině případů přesnější výsledky.

Existuje řada dalších metod založených na optimalizaci pořadí vzorků matice prvků, případně pořadové matice, které byly implementovány do metody LHS z důvodu zohlednění korelací mezi proměnnými a nejsou zde podrobněji popsány. Jejich princip je však velmi podobný algoritmům popsaným výše (např. Gram – Schmidtova pořadová ortogonalizace).

4 APLIKACE METODY LHS PRO ŘEŠENÍ GEOTECHNICKÝCH ÚLOH V ČR

Využití metody LHS v geotechnické praxi v České republice není příliš časté, převážná většina prací zabývající touto tématikou byla vypracována na akademické půdě.

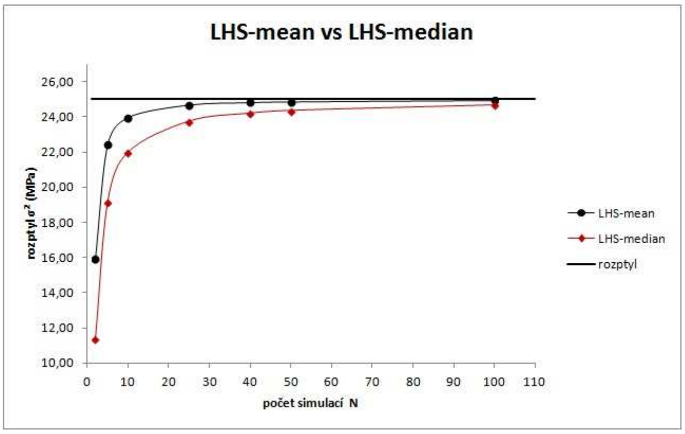
4.1 *Obecný přehled*

Statistická analýza numerického modelu tunelu Mrázovka je součástí práce Hilara (2000), kde pomocí LHS byl vyhodnocován vliv pěti základních parametrů Mohr_Coulombova modelu na deformace ostění a povrchu. Dalším příkladem je využití metody LHS pro výpočty tunelu Valík (Hrubešová a kol. 2003), kde je pomocí LHS vyhodnocován vliv 10 vstupních parametrů (např. také součinitel anizotropie, úklon puklin, atd.). Vaněčková (2008) využívá metody LHS pro řešení stability skalního svahu prostoupeného systémem diskontinuit. Geotechnické parametry a další vlastnosti ploch nespojitosti mohou nabývat čtyř různých pravděpodobnostních rozdělení. Součástí práce Paráka (2008) je využití metody LHS pro stanovení vlivu geotechnických parametrů geologických vrstev, parametrů stříkaného betonu a počátečních podmínek na strukturní síly v ostění tunelu kruhového průřezu. Využití LHS v

geotechnice se dlouhodobě věnuje doc. J. Pruška (např. Pruška, Šedivý 2010).
Výše uvedené práce předpokládají lineárně nezávislé vstupní parametry a z tohoto důvodu v nich nebyla řešena jejich vzájemná korelovanost. Dále všechny uvedené práce uvažují typ metody LHS – median (střed intervalu na oboru distribuční funkce). Tato metoda ve srovnání s LHS – mean konverguje k výsledku výrazně pomaleji a pro dosažení uspokojivé přesnosti je doporučován větší počet simulací. V převážné většině prací je zpravidla uvažováno normální pravděpodobnostní rozdělení vstupních parametrů.
Výrazné uplatnění v ČR nachází metoda LHS v oboru železobetonových konstrukcí. Ústav stavební mechaniky fakulty stavební VUT v Brně v zastoupení doc. M. Vořechovského, prof. Nováka a dalších se dlouhodobě zabývá úpravami a vylepšeními metody LHS pro praktické aplikace.

4.2 *LHS software*

V rámci řešení projektu aplikovaného výzkumu autoři příspěvku připravili a dále vyvíjejí software zaměřený na realizace pravděpodobnostních analýz metodou LHS. Tato kapitola se věnuje stručnému shrnutí vlastností programu, který je řešen v rámci jednoduchého grafického prostředí. Program umožňuje přiřadit náhodným proměnným čtyři různá základní pravděpodobnostní rozdělení (normální, log-normální, exponenciální a Weibullovo rozdělení). Výběr reprezentativních vzorků každé náhodné proměnné (veličiny) je založen na algoritmu metody LHS *mean*. Jak bylo uvedeno v kapitole 3.2, tato metoda řeší výběr reprezentativního vzorku jako střední hodnotu intervalu vymezeného na funkci hustoty pravděpodobnosti dané proměnné. Na rozdíl od standardních verzí LHS, implementovaná metoda lépe vystihuje funkci hustoty pravděpodobnosti a odhad rozptylu dané proměnné je značně bližší požadovanému (Obr. 3 – příklad konvergence rozptylu hodnot Youngova modulu E).
Tato vlastnost umožňuje další snížení počtu simulací při zachování přesnosti a tím pokles časové náročnosti analýz. Problém vzniku nežádoucích korelací mezi proměnnými a zavedení požadované korelovanosti je řešen metodou simulovaného žíhání v kombinaci s jednoduchým „dolaďovacím“ algoritmem.



Obrázek 3. Vyhodnocení rychlosti konvergence rozptylu hodnot vzorků, vybraných metodami LHS *mean* a LHS *median*, k požadované hodnotě vzhledem k počtu simulací.

Ověřování programu a samotné metody LHS *mean* v součinnosti s algoritmem simulovaného žíhání je prováděno na numerických modelech podzemních konstrukcí realizovaných v nedávné době v České republice (např. na příčném profilu tunelu Brusnice).

5 SHRNUTÍ

Metoda Latinských hyperkrychlí (LHS) představuje efektivní pravděpodobnostní metodu typu Monte Carlo pro statistické zpracování vstupních proměnných a odhad statistických momentů odezvy řešeného problému. Největší výhodou je možnost značného snížení počtu simulací oproti standardní metodě Monte Carlo při zachování vysoké přesnosti odhadů. Metoda LHS zachovává pravděpodobnostní rozdělení přiřazené všem simulovaným proměnným a umožňuje zohlednění korelovanosti mezi nimi. Byla vyvinuta a přijata řada modifikací, které zvyšují přesnost metody a současně snižují časovou náročnost simulací. Metoda LHS nachází své uplatnění v řadě oborů, mezi nimiž má své místo i geotechnika, včetně podzemního stavitelství. Využití metody LHS pro statické výpočty podzemních staveb může výrazně zpřesnit představu o předpokládaném chování posuzované konstrukce (zejména pak o pravděpodobnosti výskytu limitních stavů).

Tento příspěvek byl zpracován s podporou grantů TAČR TA01011816 a GAČR P105/12/1705.

REFERENCES

[1] Flores, A.N., Entekhabi, D., Bras, R.L. Reproducibility of soil moisture ensembles when representing soil parameter uncertainty using a Latin Hypercube–based approach with

correlation control. Water Resources Research, Vol. 46, 2010, 13pp.
[2] Florian, A. An efficient sampling scheme. Updated Latin Hypercube Sampling Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 7, 1992, pp. 123-130
[3] Hamm, N.A.S., Hall, J.W., Anderson, M.G. Variance-based sensitivity analysis of the probability of hydrologically induced slope instability. Computers & Geosciences, Vol. 32 2006, pp. 803–817
[4] Helton, J. C., Davis, F.J. Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. Reliability Engineering & System Safety, Vol. 81, Issue 1, 2003, pp. 23-69
[5] Hilar, M. Numerická analýza tektonicky porušeného horninového masivu s primární výstrojí při aplikaci NRTM. Disertační práce, 2000, ČVUT, Praha
[6] Hrubešová, E., Aldorf, A., Ďuriš, L., Vojtasík, K., Svoboda, J. Pravděpodobnostní přístup ke statickému a stabilitnímu řešení ostění tunelu Valík. Sborník konference Podzemní stavby Praha 2003. pp. 131 – 138.
[7] Huntington, D.E. and Lyrintzis, C.S. Improvements to and limitations of Latin hypercube sampling. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 13, No. 4, 1998, pp. 245-253
[8] Choi K.S., Chung Y.S., Kim K.B. Stochastic finite element analysis for uncertain undeground structure with discontinous rock mass. Transactions of the 14th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, France, 1997, pp. 71-78
[9] Iman, R.L., Conover, W.J. A distribution-free approach to inducing rank correlation among input variables. Communications in Statistics – Simulations and Computing,Vol. 11, No. 3, 1982, pp. 311–334
[10] Keramat, M., Kielbasa, R. Modified Latin Hypercube Sampling Monte Carlo (MLHSMC) Estimation for Average Quality Index. Analog Integrated Circuits and Signal Processing,Vol. 19, 1999, pp. 87-98
[11] Minasny, B., McBratney, A.B. A conditioned Latin hypercube method for sampling in the presence of ancillary information. Computers & Geosciences, Vol. 32, Issue 9, 2006, pp. 1378-1388
[12] Morris, M., Mitchel, T. Exploratory design for computer experiments. Journal of Statistical Planning and Inference, Vol. 43, pp. 381-402
[13] Olsson, A., Sandberg, G., Dahlblom, O. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. Structural Safety, Vol. 25, Issue 1, 2003, pp. 47-68
[14] Parák, T. Použití pravděpodobnosti a matematické statistiky při výpočtech geotechnických konstrukcí. Disertační práce, 2009, ČVUT, Praha
[15] Pruška, J. - Šedivý, M. Aplikace metody latinských hyperkrychlí. Geotechnika. 2010, roč. 13, č. 3-4, s. 31-34. ISSN 1211-913X
[16] Suchomel, R. Využití pravděpodobnostních metod v geomechanice. Disertační práce, 2011, UK v Praze
[17] Vaněčková, V. Výpočet stability skalních svahů. Disertační práce, 2008, ČVUT, Praha
[18] Vořechovský, M., Novák, D. Correlation control in small-sample Monte Carlo type simulations I. A simulated annealing approach. Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 24, Issue 3, 2009, pp. 452-462
[19] Ye , K.Q., Li, W., Sudjianto, A. Algorithmic construction of optimal symmetric Latin hypercube designs. Journal of Statistical Planning and Inferences, Vol. 90, 2000, pp. 145-159